PRÁCTICA 1

ESPACIO DE PROBABILIDAD

Ejercicio 1. Dar un espacio muestral adecuado para cada uno de los siguientes experimentos y asigne probabilidad a los mismos.

a) Una caja tiene 5 bolillas numeradas $1,2,3,4,5$. Se extrae una al azar.
b) Una caja tiene 5 bolillas marcadas $1,2,3,4,5$. Se extrae una bolilla al azar, se la reemplaza y se hace una segunda extracción al azar.
c) Una caja tiene 5 bolillas marcadas $1,2,3,4,5$. Se extrae una bolilla al azar, no se la reemplaza y se hace una segunda extracción al azar.
d) Cinco cartas marcadas $1,2,3,4,5$ son mezcladas y puestas en fila.
e) una moneda es arrojada 5 veces.
f) Un dado es arrojado 5 veces.
g) Una moneda es arrojada hasta que aparece una cara.
h) Un dado es arrojado hasta que aparece un 1.
i) Un dado es arrojado hasta que aparece un uno o un dos.

Ejercicio 2. Sean A, B y C eventos aleatorios en el e.p.d. Aparear cada ecuación expresada con la notación de conjuntos con la frase correspondiente en lenguaje de evento.

$a)$	$A\cap B\cap C = A\cup B\cup C$	$i)$	A y (B o C) son disjuntos
$b)$	$A\cap B\cap C = A$	$ii)$	Si **no** ocurre A entonces **no** ocurre (B o C)
$c)$	$A\cup B\cup C = A$	$iii)$	La ocurrencia de A implica la ocurrencia de (B y C)
$d)$	$A\cup B\cup C-(B\cup C) = A$	$iv)$	Los eventos A, B y C son idénticos

Ejercicio 3. Si A, B y C son eventos aleatorios de un espacio de probabilidad. Demostrar que:

i) Si $A\subset B$ entonces $P(B-A) = P(B)-P(A)$.
ii) $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
iii) $P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$.
iv) Enuncie una generalización de los items (ii) y (iii) para el caso de una unión de n eventos aleatorios en un espacio de probabilidad.

Ejercicio 4. Sean $A_1, A_2, \ldots$ eventos aleatorios en un espacio de probabilidad. Probar que:

i) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.
ii) $P\left(\bigcap_{n=1}^{k} A_n\right) \geq 1-\sum_{n=1}^{k} P(A_n^c)$.
iii) $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq 1-\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c)$.

Ejercicio 5. Sean $A_1, A_2, \ldots$ eventos aleatorios en el e.p.. Probar que:

i) Si $P(A_n) = 0\ \forall n\in\mathbb{N}$ entonces $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.
ii) Si $P(A_n) = 1\ \forall n\in\mathbb{N}$ entonces $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

iii) Si $\{A_n\}$ es una sucesión creciente de eventos ($A_i \subseteq A_{i+1} \ \forall\, i$), entonces $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

iv) Si $\{A_n\}$ es una sucesión decreciente de eventos ($A_{i+1} \subseteq A_i \ \forall\, i$), entonces $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

Ejercicio 6. Demostrar que si $A_1, A_2, \ldots$ y $B_1, B_2, \ldots$ son eventos aleatorios en el mismo e.p. tales que $P(A_n) \longrightarrow 1$ y $P(B_n) \longrightarrow p$ (con $p \in [0,1]$) cuando $n \longrightarrow \infty$ entonces $P(A_n \cap B_n) \longrightarrow p$.

Ejercicio 7. Sean $A_1, A_2, \ldots$ eventos aleatorios en el e.p.. Se define:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Si $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = A$ y llamamos $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ entonces probar que

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$$

Ejercicio 8. Sea Ω un conjunto no vacío.

a) Probar que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son σ-álgebras de subconjuntos de Ω, entonces $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es también un σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

b) Generalización de a): Si $\mathcal{A}_i$ con $i \in I$ son σ-álgebras de subconjuntos de Ω, entonces $\cap_{j\in I}\mathcal{A}_j$ es también un σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

c) Sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de Ω. Muestre que existe por lo menos una σ-álgebra de subconjuntos de Ω que contiene a $\mathcal{C}$.

d) Una vez pensados los items b) y c).¿Cómo definiría a la menor σ-álgebra de subconjuntos de Ω que contiene a $\mathcal{C}$?.

Ejercicio 9. Describir un espacio de probabilidad que sirva para modelar cada uno de los siguientes experimentos.

i) De un mazo de 52 cartas se extrae aleatoriamente y con reposición hasta obtener el primer rey. Se registra el número total de retiradas.

ii) Quince bolas son extraídas, aleatoriamente y con reposición, de una urna que contenía 5 bolas rojas, 9 bolas negras y una blanca. Se observa el número de veces que ocurre cada color.

iii) El experimento (ii) es realizado sin reposición.

Ejercicio 10. Se retiran 4 cartas, aleatoriamente, de un mazo de 52 cartas. Se registra el número de reyes en la muestra.

a) Describir un espacio de probabilidad que sirva para modelar el experimento si:

  i) las extracciones son realizadas sin reposición.

  ii) las extracciones son realizadas con reposición.

b) Determine en que caso, (i) o (ii), es mas probable obtener 4 reyes.

Ejercicio 11. Suponga que A y B son eventos aleatorios en un e.p.d.

i) Si $P(A) = 3/4$ y $P(B) = 2/3$ entonces ¿pueden ser A y B disjuntos?

ii) Sea $p \in \mathbb{R}$ y $P(A) = P(B) = p$ entonces ¿puede ser $P(A \cap B) \leq p^2$?

Ejercicio 12. Cinco bolas distinguibles son distribuidas aleatoriamente en tres celdas A, B y C. Calcular las probabilidades de los siguientes eventos:

a) La caja "A" está vacía.

b) Solo la caja "A" está vacía.
c) Exactamente una caja vacía.
d) Al menos una caja está vacía.
e) Ninguna caja está vacía.
f) Dos cajas están vacías.
g) Tres cajas están vacías.
h) La caja "A" o "B" están vacías.
¿Cambia el experimento si las bolas son indistinguibles?

Ejercicio 13. Cinco cartas numeradas de 1 a 5 son puestas aleatoriamente en fila. Calcular la probabilidad de los siguientes eventos:
i) La carta "1" aparece en la primera posición.
ii) La carta "1" está inmediatamente seguida por la carta "2".
iii) La carta "1" no está en la primera posición y la "2" no está en la segunda posición.
iv) Hay exactamente tres coincidencias, esto es: la carta "i" está en la posición "i".

Ejercicio 14. Un mazo de 52 cartas es mezclado y se dan 13 cartas a cada uno de los 4 jugadores A, B, C y D. Calcular la probabilidad de los siguientes eventos:

a) "A" tiene todos los corazones , "B" todos los diamantes, "C" todos los tréboles y "D" todas las espadas.
b) Cada jugador tiene cartas de un solo palo.
c) El jugador "A" **no** tiene ases.
d) Los jugadores "A" y "B" obtienen un total de 15 cartas rojas entre los dos.

Ejercicio 15 Se arrojan dos dados equilibrados.
i) ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos cinco puntos en la suma de ambos resultados?
ii) Calcular la probabilidad de que la suma de ambos resultados sea par.

Ejercicio 16. De 6 números positivos y 8 negativos, se eligen aleatoriamente 4 números sin sustitución y luego se multiplican. ¿Cuál es la probabilidad que el producto sea un número positivo?

Ejercicio 17. Una urna contiene diez tickets numerados del 0 al 9. Se extrae una muestra de tamaño tres con reemplazo. Al arreglar los números en hilera, en el orden en que aparecen, se forma un número entero entre 0 y 999. ¿ Cuál es la probabilidad de que el número formado de esta manera sea divisible por 39 ? (Nota considere el cero como divisible por 39).

Ejercicio 18. Dos amigos, Antonio y Daniel, son miembros de un grupo de seis personas que han colocado sus mochilas en un perchero. Cada persona selecciona al azar una mochila del perchero. ¿ Cuál es la probabilidad de que:
i) Antonio obtenga su propia mochila?,
ii) ambos, Antonio y Daniel, escojan sus propias mochilas?,
iii) por lo menos uno, Antonio o Daniel, escoja su mochila?.

Ejercicio 19. Hay 10 pares de zapatos en un armario; se eligen sucesivamente cuatro zapatos al azar. Hallar la probabilidad de que se logre al menos un par.

Ejercicio 20. Felipe estaciona su auto en la calle, es decir en alguno de los lugares de una hilera de n autos, sin que quede en ninguna de las esquinas, porque va al dentista. Caundo vuelve encuentra que exactamente r de los n lugares estan todavía ocupados (esto incluye, claro esta, su propio vehículo). ¿Cuál es la probabilidad de que ambos lugares contiguos esten ocupados, es decir, que Felipe se vea forzado a maniobrar mucho para poder sacar su auto, encima con la boca anestesiada y sin dirección hidráulica?

Ejercicio 21. Problemas de coincidencias.
Supongamos que n cartas marcadas con $1,\dots,n$ son mezcladas y puestas en fila. Diremos que hay una coincidencia si la carta i está en la posición i.

a) Sea A_i el evento "la carta i está en la posición i", con $i = 1,\dots,n$. Sea S_k definida por $S_k = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})$ con $k = 1,\dots,n$. Muestre que
$$P(\cap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)} \quad \text{y que} \quad S_k = \frac{1}{k!}.$$

b) Muestre que la probabilidad p_n de que no hayan coincidencias al colocar n cartas en fila es $p_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$ y que $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{e}$.

c) Muestre que la probabilidad de que hayan exactamente k coincidencias es $\frac{p_{n-k}}{k!}$.

Ejercicio 22. Problema de bolas en celdas.

a) Supongamos que nos interesa distribuir n bolas distinguibles en m celdas. Los puntos muestrales de este experimento pueden ser vistos como n-uplas donde cada coordenada a_{i_j} es el número de celda en que cae la bola j, por ejemplo, $(a_{i_1},\dots,a_{i_n})$ representa la situación "la bola 1 cae en la celda a_{i_1}, la bola dos cae en la celda a_{i_2}, ..., la bola n cae en la celda a_{i_n}". Calcule la probabilidad de uno de dichos puntos.

b) Si las bolas son indistinguibles, cada punto $(a_{i_1},\dots,a_{i_n})$ se transforma en una m-upla $(k_1,\dots,k_m)$ donde k_j es el número de bolas que cayeron en la celda j, por lo cual el espacio muestral queda reducido a m-uplas $(k_1,\dots,k_m)$ con $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$. Pruebe que $P((k_1,\dots,k_m)) = \frac{n!}{k_1!\dots k_m!}\cdot\frac{1}{m^n}$.

c) Si se asigna a cada uno de lo $(k_1,\dots,k_n)$ igual probabilidad tenemos el esquema de Bosse-Einstein (usado en Mecánica). Probar que hay $\binom{n+m-1}{n}$ sucesiones $(k_1,\dots,k_m)$ con $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$ donde k_j es el número de bolas en la celda j.